

# Особенности дифференциальных дрожаний в DIMM

В. Корнилов, Б. Сафонов

4 апреля 2010 г.

## 1 Введение

Широко используемый в исследованиях оптической турбулентности монитор дифференциальных дрожаний DIMM предназначен для измерения интегрального эффекта земной атмосферы на качество изображения. Достоинства этого инструмента достаточно очевидны: простой и надежный прибор, подходящий для продолжительных и полевых исследований, данные измерений легко интерпретируются на основе теории распространения световой волны в турбулентных средах, получаемый результат прямо связан с основной астроклиматической характеристикой — качеством изображения.

Однако существует ряд эффектов, вносящих систематические и случайные ошибки в результаты измерений с инструментом DIMM. Хотя эти эффекты уже многократно обсуждались, приемлимая однозначность и определенность в их оценке так и не была достигнута. В настоящей работе приводятся результаты дополнительного анализа и оценок влияния на реальные измерения следующих эффектов:

1. Влияние распространения искаженной световой волны (отказ от приближения ближней зоны диффракции).
2. Влияние ширины спектральной полосы излучения (эффект полихроматизма).
3. Влияние конечной экспозиции. Метод корреляций для учета этого эффекта.
4. Влияние продолжительности измерения. Оценка низкочастотного вклада дифференциальных дрожаний.

Осуществляемая нами подготовка к обработке данных измерений с прибором MASS/DIMM на горе Шатджатмаз в 2007 – 2009 гг инициировала разработку практического способа учета перечисленных эффектов при совместной обработке данных приборов MASS и DIMM.

В двух первых разделах приводятся основные сведения из теории, описывающей эффект дифференциальных дрожаний в приближении малых возмущений — ситуации, которая, как правило, реализуется в типичных условиях астрономических наблюдений. На этой основе далее рассматривается случай с распространением световой волны и вводится понятие весовой функции DIMM для последующего практического использования. В разделе 5 вычисляется весовая функция для случая полихромного излучения.

## 2 Пространственный спектр дифференциальных дрожаний

Выражения для пространственного спектра дифференциальных дрожаний приведены в классических работах Фрида [1] и Мартина [2]. В работе Мартина они получены последовательной пространственной фильтрацией исходного спектра мощности фазовых возмущений в предположении колмогоровской модели оптической турбулентности ОТ.

Известно, что спектральная плотность мощности флуктуаций фазы  $F_\phi(f_x, f_y)$  пропорциональна интенсивности оптической турбулентности  $J = C_n^2 \Delta h$  в рассматриваемом однородном и изотропном слое:

$$F_\phi(f_x, f_y) = F_\phi(f) = 0.0229 r_0^{-5/3} f^{-11/3} = 0.0229 \cdot 0.423 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 J f^{-11/3}, \quad (1)$$

где  $f = (f_x^2 + f_y^2)^{1/2}$  — модуль пространственной частоты,  $f_x$  и  $f_y$  — ее компоненты, а  $r_0$  — параметр Фрида. Для практических целей предпочтительнее рассматривать  $J$ , поскольку эта величина используется для описания вертикального профиля турбулентности.

Выражение для спектра мощности дрожаний будет зависеть от того, что понимается под центром изображения. Это важно, поскольку искаженный волновой фронт не является плоским в пределах используемой апертуры и построенное объективом изображение не будет ни дифракционным, ни осесимметричным. Обычно это либо центр тяжести изображения (g-tilt) [2], либо нормаль к аппроксимирующей волновой фронт плоскости (z-tilt) [3]. Различие между этими двумя подходами анализируется в работе [4].

Пространственный спектр дрожаний в смысле движения центра тяжести изображения, построенного объективом с апертурой  $D$ , выглядит следующим образом [2]:

$$F_a^g(f_x, f_y) = \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 (2\pi(f_x \cos \theta + f_y \sin \theta))^2 \left[ \frac{2J_1(\pi D f)}{\pi D f} \right]^2 F_\phi(f_x, f_y), \quad (2)$$

где  $\theta$  — угол между осью  $x$  и направлением, в котором измеряется дрожание. Для дальнейшего удобно ось  $x$  направить вдоль направления ветра.

Спектральная плотность  $F_d(f_x, f_y)$  дифференциальных дрожаний, измеряемых в приборе DIMM, получается умножением  $F_a$  на спектральный фильтр, соответствующий двум апертурам, размещенным на расстоянии  $B$  друг от друга под углом  $\theta - \psi$  к оси  $x$ :

$$F_d(f_x, f_y) = [2 \sin(\pi B(f_x \cos(\theta - \psi) + f_y \sin(\theta - \psi)))]^2 F_a(f_x, f_y) \quad (3)$$

Практический смысл имеют значение  $\psi = 0$ , соответствующее продольным дрожаниям (вдоль базы прибора), и значение  $\psi = \pi/2$  в случае поперечных дрожаний. На Рис. 1 приведены контурные изображения двумерной спектральной плотности мощности дрожаний для этих случаев. На рисунке база прибора направлена вдоль оси  $x$ , при повороте базы картина будет поворачиваться вместе с ней. Обращает на себя внимание кардинальное различие вида пространственного спектра для продольных и поперечных дифференциальных дрожаний — первый имеет дипольную структуру, а второй — квадрупольную. В обоих случаях плотность мощности при  $|f| = 0$  нулевая.

Заметим, что после подстановки (1) в (2) итоговое выражение для спектральной плотности не будет зависеть от длины световой волны  $\lambda$ . Дисперсия дрожаний по определению

выражается через их спектр мощности так:

$$\sigma_d^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} F_d(f_x, f_y) df_x df_y, \quad (4)$$

Собственно, подставив сюда (3) и проинтегрировав, мы получим необходимое практически выражение, связывающее измеренные прибором DIMM дифференциальные дрожания и интенсивность турбулентности  $J$  рассматриваемого слоя. В приближении малых возмущений можно дополнительно проинтегрировать выражение 4 по всему лучу зрения и получить известную формулу из [5].

Напомним, что выражение (2) получено для случая ближней зоны дифракции света, то есть без учета эффекта распространения искаженной световой волны.

Таким же образом можно найти соответствующее выражение для мощности дифференциальных дрожаний в смысле z-tilt, используя выражение из работы [4], слегка его преобразовав:

$$F_a^z(f_x, f_y) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 (2\pi(f_x \cos \theta + f_y \sin \theta))^2 \left[\frac{8J_2(\pi Df)}{(\pi Df)^2}\right]^2 F_\phi(f_x, f_y) \quad (5)$$

Спектральная плотность в смысле z-tilt отличается от  $F_a^g(f_x, f_y)$  только видом апертурного фильтра. Этот фильтр несколько шире чем апертурный g-tilt фильтр, хотя в области высоких частот его пропускание падает быстрее.

### 3 Временные спектры дифференциальных дрожаний

Большой практический интерес чем пространственные спектры, имеют временные спектры дифференциальных дрожаний, поскольку реальный прибор регистрирует движения изображений от кадра к кадру, полученных в разные моменты времени.

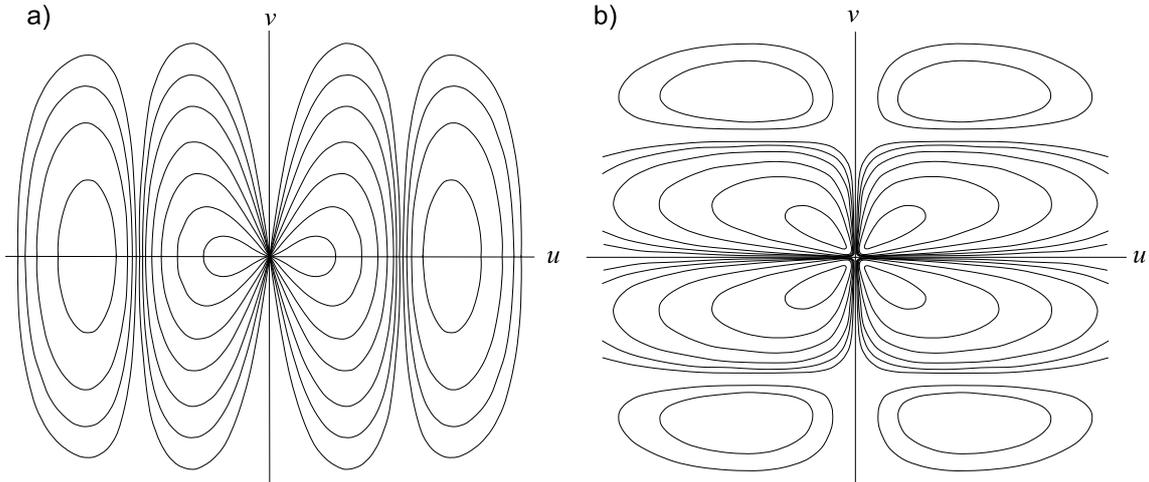


Рис. 1: Контурное представление спектральной плотности мощности дифференциальных дрожаний в а) продольном и б) поперечном направлениях. Апертуры DIMM направлены вдоль оси u. Контурные кривые нанесены в логарифмическом масштабе с шагом 0.5.

Рассмотрим сначала изолированный турбулентный слой, перемещающийся с постоянной скоростью  $w$ . Последующее преобразование пространственного спектра во временной основано на гипотезе “замороженности” Тэйлора [7], т.е. предположении что фазовые искажения изменяются значительно медленнее, чем  $D/w$ . В этом случае временной спектр мощности дифференциальных дрожаний определяется следующим выражением [2]:

$$F_d(\nu) = \frac{2}{w} \int_0^\infty df_y F_d\left(\frac{\nu}{w}, f_y\right) \quad (6)$$

Напомним, что ось  $x$  направлена вдоль ветра. В силу того, что пространственный спектр не обладает центральной симметрией, для разных направлений базы прибора вид временных спектров будет различный. Рассчитанные для 4-х направлений ветра нормированные спектры  $F_d(\nu)$  представлены на Рис. 2.

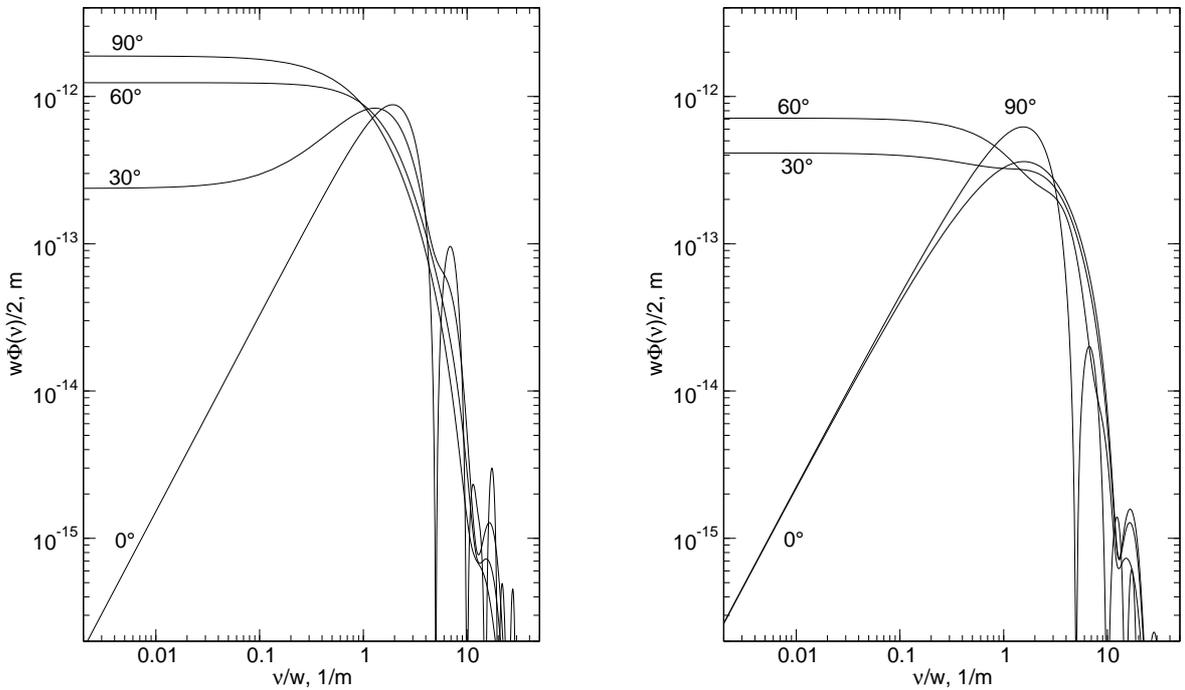


Рис. 2: Нормированные на скорость ветра временные спектры дифференциальных дрожаний для различных направлений ветра относительно базы прибора. Кривые рассчитаны для  $D = 0.09$  м,  $B = 0.2$  м и  $r_0 = 0.1$  м. Спектры для продольных дрожаний представлены слева, для поперечных — справа

Понятно, что в реальной ситуации ветер значительно флуктуирует и по скорости и по направлению. Поэтому итоговый спектр мощности будет представлять собой сложную композицию из многих отдельных спектров. Прежде всего замываются квазипериодические детали в высокочастотной области и поведение спектра приближается к зависимости  $\nu^{-1}$ . В низкочастотной области  $\nu \ll w/D$  спектр определяется самым медленным слоем с заметной турбулентностью, как правило — приземным слоем. В зависимости от угла между ветром

и базой DIMM мощность дифференциальных дрожаний при стремлении частоты к 0 либо выходит на постоянный уровень либо падает степенным образом с показателем 4/3.

Разделяющая эти области характерная частота составляет в нашем случае 1 – 3 Гц для типичного приземного ветра. Корректному анализу низкочастотная область спектра не поддается, поскольку использование гипотезы “замороженности” на таких временах не всегда правомочно. Обсуждение вклада низкочастотных движений будет проведено в разделе 8

## 4 Учет распространения света — весовая функция DIMM

Вся теория и практика определения качества изображения  $\beta$  по дифференциальным дрожаниям, измеряемым DIMM, построена в приближении ближней зоны дифракции, т.е. для случая  $D^2 \gg \lambda z$ . Однако для реальных приборов в реальных ситуациях это условие не всегда выполняется.

Проблема обострилась после появления больших массивов данных измерений с прибором MASS/DIMM, когда стало ясно, что нередко наблюдаются случаи доминирующей высотной (8 – 24 км) турбулентности. На практике это приводит к тому, что DIMM недооценивает суммарную интенсивность ОТ и при попытке вычислить интенсивность приземного слоя как  $J_{DIMM} - J_{MASS}$  получается, что приземный слой имеет отрицательную интенсивность [5, 6, 8];

Эта проблема была отмечена во многих работах, например [5], а величина эффекта оценивалась в [4, 9]. Тем не менее никаких практических шагов по учету недооценки высокой ОТ выполнено не было.

Покажем, что метод коррекции возможен в рамках формализма весовых функций (используемых в теории MASS [10, 11]), то есть зависимость дисперсии дифференциальных дрожаний  $\sigma^2$  от профиля турбулентности  $C_n^2(z)$  может быть представлена в следующем виде:

$$\sigma^2 = \int_0^\infty C_n^2(z) W(z) dz, \quad (7)$$

Чтобы учесть эффект распространения искаженной световой волны от слоя, расположенного на расстоянии  $z$ , достаточно в формулу (1) для спектральной плотности мощности флуктуаций фазы добавить фильтр Френеля  $\cos^2(\pi \lambda z f^2)$ , как это сделано, например, в [4]:

$$\Delta F_\phi(f, z) = 0.009687 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 C_n^2(z) \Delta z f^{-11/3} \cos^2(\pi \lambda z f^2), \quad (8)$$

Дальнейшие преобразования опираются на тот факт, что в приближении слабых возмущений суммарная мощность флуктуаций фазы наблюдаемой световой волны есть сумма спектров мощности от всех тонких слоев, которые она пересекает [7]:

$$F_\phi(f) = 0.009687 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \int_0^\infty C_n^2(z) f^{-11/3} \cos^2(\pi \lambda z f^2) dz. \quad (9)$$

Очевидно, что поскольку ни один из трех фильтров (градиентный, апертурный и дифференциальный) не зависят от расстояния  $z$  мы можем производить интегрирование по частоте до интегрирования по  $z$ . Обозначим полный спектральный фильтр как  $\left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \Phi(f_x, f_y)$ . Напомним, что этот фильтр зависит от параметров прибора  $D$ ,  $B$  и угла дрожаний  $\psi$ . Тогда

выражение для дисперсии дифференциального дрожания можно записать, опуская нижний индекс  $d$ , как:

$$\sigma^2 = \int_0^\infty dz C_n^2(z) \times 0.009687 \iint_{-\infty}^{+\infty} df_x df_y \Phi(f_x, f_y) f^{-11/3} \cos^2(\pi \lambda z f^2). \quad (10)$$

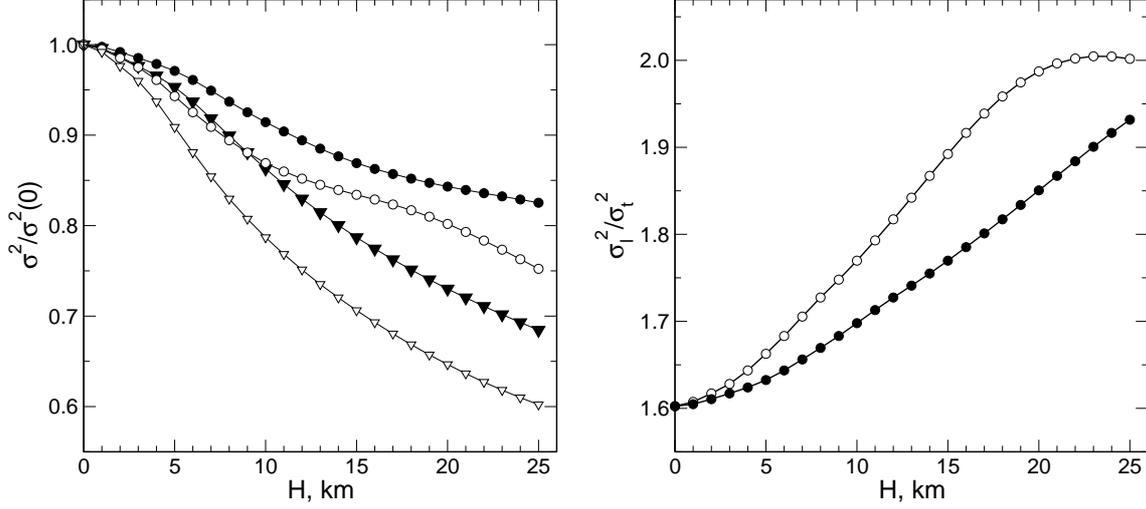


Рис. 3: Слева: нормированные на приближение ближней зоны весовые функции DIMM  $W(h)/W(0)$  для случая g-tilt. Круглые точки — продольные дрожания, треугольники — поперечные. Справа: отношение дисперсии продольных дрожаний к дисперсии поперечных. Заполненные символы — расчет для  $\lambda = 500$  нм, пустые — для  $\lambda = 750$  нм

Внутренний двойной интеграл можно трактовать как высотную весовую функцию DIMM  $W(z)$ , зависящую, как и весовые функции MASS, от параметров конкретного прибора. Для практического применения нужно вычислять две таких функции —  $W_l(z)$  для продольных дрожаний и  $W_t(z)$  для поперечных.

$$W_{l,t}(z) = 0.009687 \iint_{-\infty}^{+\infty} df_x df_y \Phi_{l,t}(f_x, f_y) f^{-11/3} \cos^2(\pi \lambda z f^2). \quad (11)$$

Переход к полярным координатам в выражении (11) позволяет аналитически проинтегрировать его по углу  $\phi$  [2] и формула для весовой функции становится:

$$W_{l,t}^{g,z}(z) = 0.009687 \times 8\pi^3 \int_0^\infty df I^{g,z}(f) \left[ 1 - 2 \cos^2(\psi) J_0(2\pi f B) + 2 \cos(2\psi) \frac{J_1(2\pi f B)}{2\pi f B} \right]. \quad (12)$$

Заметим, что различие весовых функций для случаев g-tilt (2) и z-tilt (5), заложено в множителе  $I^{g,z}(f)$ , зависящем лишь от модуля частоты:

$$I^g(f) = f^{-2/3} \left[ \frac{2J_1(\pi f D)}{\pi f D} \right]^2 \cos^2(\pi \lambda z f^2), \quad (13)$$

$$I^z(f) = f^{-2/3} \left[ \frac{8J_2(\pi f D)}{(\pi f D)^2} \right]^2 \cos^2(\pi \lambda z f^2). \quad (14)$$

Учитывая, что для продольных дрожаний  $\psi = 0$ , а для поперечных —  $\psi = \pi/2$ , окончательно получаем:

$$W_l^{g,z}(z) = 2.403 \int_0^\infty df I^{g,z}(f) \left[ 1 - 2J_0(2\pi f B) + 2\frac{J_1(2\pi f B)}{2\pi f B} \right] \quad (15)$$

$$W_t^{g,z}(z) = 2.403 \int_0^\infty df I^{g,z}(f) \left[ 1 - 2\frac{J_1(2\pi f B)}{2\pi f B} \right] \quad (16)$$

Вычисление  $W_{l,t}(z)$  может быть произведено численным интегрированием, подобно тому, как в программе *atmos* вычисляется набор весовых функций MASS. Заметим, что в отличие от приближения ближней зоны, в дифференциальных дрожаниях появилась зависимость от длины волны и, следовательно, от спектрального состава излучения. Непосредственно проинтегрировать по  $\lambda$ , так же как и в случае весовых функций MASS [12], нельзя, поскольку смещения в близких длинах волн сильно связаны. Однако, ввиду малости эффекта (он заведомо меньше фактора 0.5) можно использовать некоторым образом определенную эффективную длину волны.

На Рис. 3 приведены весовые функции, рассчитанные для нашего прибора и нормированные на свои значения при нулевой высоте. На самом деле, весовые функции зависят от одного параметра — Френелевского радиуса  $r_F^2 = \lambda z$ , поэтому изменение длины волны может легко компенсировано изменением высоты. Например, изображенные на Рис. 3 весовые для  $\lambda = 750$  нм переходят в кривые для  $\lambda = 500$  нм изменением масштаба по высоте в 1.5 раза.

Обращает на себя внимание значительное различие между поведением  $W_l(z)$  и  $W_t(z)$ , проистекающее из существенных различий в виде пространственных спектров продольной и поперечной компонент дрожания (Рис. 1). В результате, с высотой меняется отношение  $\sigma_l^2/\sigma_t^2$ , что показано на Рис. 3 справа.

Этот эффект может быть наблюдаем на практике, если выделить ситуации с доминирующей высокой турбулентностью. По результатам предварительной обработки, выполненной в приближении ближней зоны, все измерения были разделены на две группы: с положительной интенсивностью в приземном слое и с отрицательным значением  $J_{DIMM} - J_{MASS}$ . Влияние высотной турбулентности подтверждается распределениями наблюдаемых отношений  $\sigma_l^2/\sigma_t^2$  для этих двух групп, показанными слева на Рис. 4. Медианные значения равны 1.58 и 1.73 соответственно.

На Рис. 4, справа, показано поведение медианного значения  $J_{DIMM} - J_{MASS}$  в зависимости от интенсивности 16 км слоя  $J_{16}$ . Видно, что эффект “отрицательного” приземного слоя действительно вызывается недоучетом высотной турбулентности. Загиб медианной кривой начинается задолго до того как мерцания, генерируемые 16 км слоем, достигают режима насыщения, и поэтому не может быть объяснен переоценкой ОТ по измерениям с прибором MASS.

Как показано в работе [4], реально применяемый в DIMM метод определения центра изображения как центра тяжести после отсечения крыльев изображения на некотором уровне или на некотором радиусе, ближе к случаю z-tilt. Поэтому в программе обработки данных DIMM используется выражение (14). Заметим, что различие между  $W_{l,t}^g(0)$  и

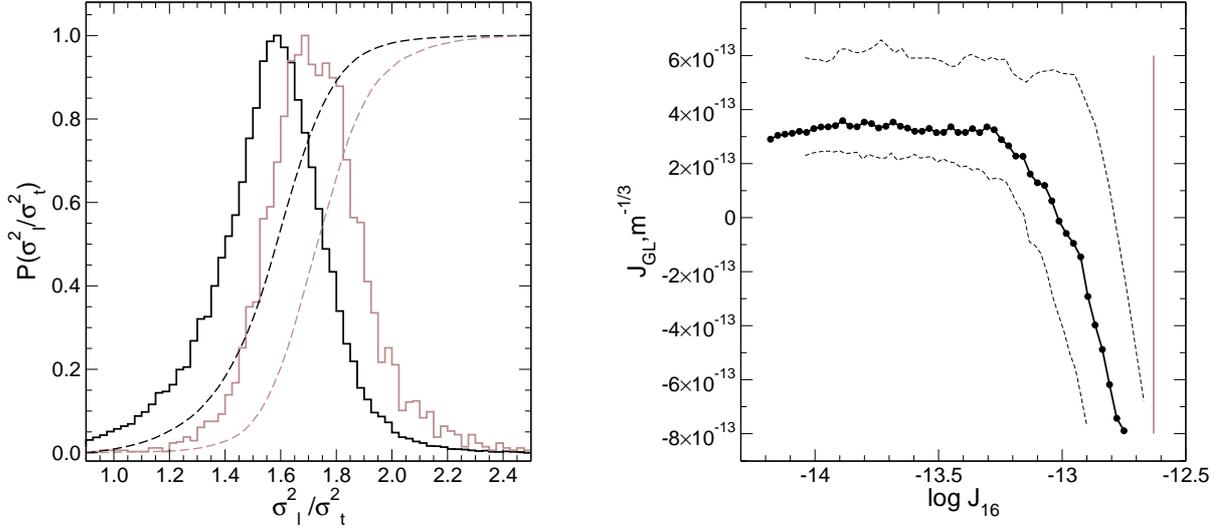


Рис. 4: Слева: Распределения наблюдаемых отношений  $\sigma_l^2/\sigma_t^2$  для случаев “положительной” (черные кривые) и “отрицательной” (светлые) приземной турбулентности  $J_{DIMM} - J_{MASS}$ . Справа: Поведение медианы приземной турбулентности в зависимости от мощности 16 км слоя. Штриховые линии — 25 и 75% точки распределений. Светлая вертикальная линия соответствует мощности, соответствующей индексу мерцаний 0.3 в апертуре А прибора MASS

$W_{l,t}^z(0)$  достаточно велико и для геометрии нашего DIMM составляет 12% и 17%. Отличие  $W_{l,t}^z(0)$  от ранее используемых значений из [5] меньше 3 и 5% соответственно.

Таким образом, в случае DIMM, постоянно работающего вместе с прибором MASS, во все не обязательно стремиться к тому, чтобы приближение ближней зоны выполнялось как можно лучше. А это дает возможность принципиально изменять геометрию прибора. Например, DIMM может состоять из двух 5 см апертур, расположенных вплотную друг к другу. Чувствительность такого прибора упадет примерно вдвое — для высот больше 10 км прибор будет работать в дальней зоне, но зато в качестве питающей оптики можно использовать объектив около 10 см в диаметре.

## 5 Эффект ширины спектральной полосы DIMM

Как уже отмечалось, дифференциальные дрожания перестают быть ахроматическими как только мы выходим за пределы ближней зоны  $D^2 \gg \lambda z$ . Вопрос влияния полихроматичности излучения исследовался в [13], однако, с практической точки зрения, предпочтительнее подход, продемонстрированный в [12] для случая полихроматических мерцаний.

Величина дифференциального смещения изображений звезд в геометрии DIMM  $\alpha(\lambda)$  при учете эффекта распространения будет зависеть от длины волны. Рассматривая тонкий турбулентный слой на высоте  $z$  можно записать:

$$\alpha(\lambda) = \int \tilde{\phi}(\vec{f}, \lambda) \tilde{\psi}(\vec{f}, \lambda) \cos(\pi \lambda z f^2) d\vec{f}, \quad (17)$$

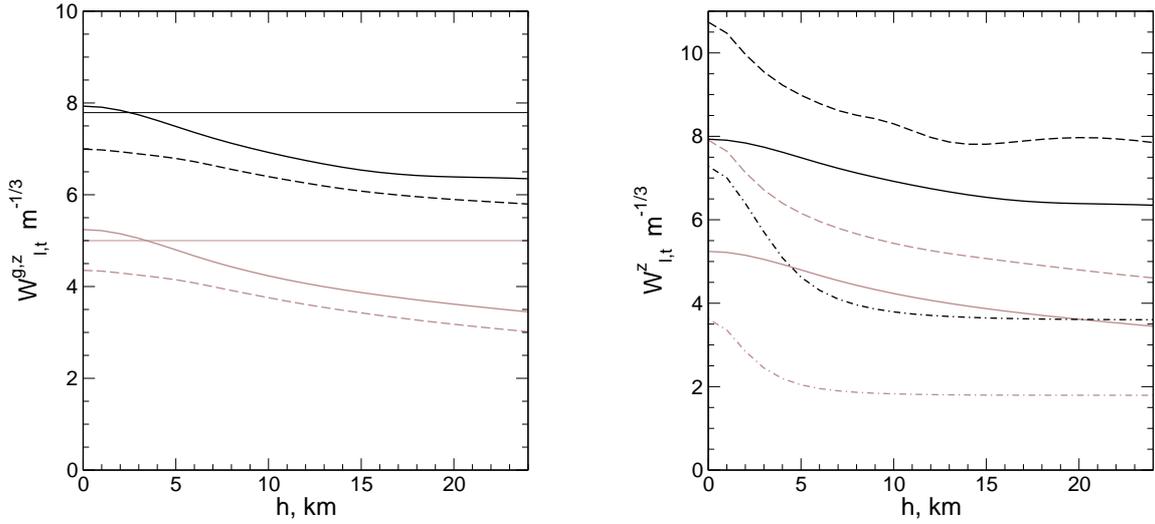


Рис. 5: Слева: Весовые функции для нашего DIMM ( $D = 0.09$ ,  $B = 0.196$ ). Сплошные кривые –  $W_{l,t}^z(0)$ , пунктирные –  $W_{l,t}^g(0)$ , тонкие линии – значения, посчитанные по формулам из [5]. Справа: весовые функции DIMM: сплошные кривые – наш прибор, штриховые – DIMMA IAC:  $D = 0.05$ ,  $B = 0.20$ , штрих-пунктирные кривые – miniDIMM:  $D = 0.05$ ,  $B = 0.05$ . Продольные дрожания обозначены черным цветом, поперечные – серым

где апертурная функция входит в спектральный фильтр DIMM  $\tilde{\psi}(\vec{f}, \lambda)$ ,  $\tilde{\phi}(\vec{f}, \lambda)$  – спектр флуктуаций фазы, а интегрирование производится по всем двумерным пространственным частотам  $\vec{f}$ . При измерении дифференциальных дрожаний в некоторой спектральной полосе нужно произвести интегрирование по длине волны:

$$\alpha = \int \alpha(\lambda) A(\lambda) d\lambda, \quad (18)$$

где  $A(\lambda)$  – нормированная спектральная характеристика излучения.

Отсюда, зная что  $\langle \alpha \rangle \equiv 0$ , можно определить дисперсию  $\sigma^2 = \langle \alpha^2 \rangle$  дифференциальных дрожаний:

$$\sigma^2 = \iint \langle \alpha(\lambda_1) \alpha(\lambda_2) \rangle A(\lambda_1) A(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \quad (19)$$

Выражение для ковариации  $\langle \alpha(\lambda_1) \alpha(\lambda_2) \rangle$  получается из (17):

$$\langle \alpha(\lambda_1) \alpha(\lambda_2) \rangle = \iint \langle \tilde{\phi}(\vec{f}_1, \lambda_1) \tilde{\phi}^*(\vec{f}_2, \lambda_2) \rangle \tilde{\psi}(\vec{f}_1, \lambda_1) \tilde{\psi}^*(\vec{f}_2, \lambda_2) \cos(\pi \lambda_1 z f_1^2) \cos(\pi \lambda_2 z f_2^2) d\vec{f}_1 d\vec{f}_2 \quad (20)$$

Воспользуемся выражением (10) из работы [12]:

$$\langle \tilde{\phi}(\vec{f}_1, \lambda_1) \tilde{\phi}^*(\vec{f}_2, \lambda_2) \rangle = F_\phi(\vec{f}_1) \delta(|\vec{f}_1 - \vec{f}_2|) = \frac{4\pi^2}{\lambda_1 \lambda_2} F_l(\vec{f}_1) \delta(|\vec{f}_1 - \vec{f}_2|), \quad (21)$$

что позволяет свести двойной интеграл к однократному, и определив ахроматичный спектральный фильтр дрожаний  $\Phi_d(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = \frac{4\pi^2}{\lambda_1\lambda_2} \tilde{\psi}(\vec{f}_1, \lambda_1) \tilde{\psi}^*(\vec{f}_2, \lambda_2)$ , получим (20) в виде:

$$\langle \alpha(\lambda_1)\alpha(\lambda_2) \rangle = \int F_l(\vec{f}) \Phi_d(\vec{f}) \cos(\pi\lambda_1 z f^2) \cos(\pi\lambda_2 z f^2) d\vec{f} \quad (22)$$

Таким образом мы явно выделили зависимость от  $\lambda$ . Теперь ковариацию можно подставить в выражение (19), поменяв порядок интегрирования и обозначив

$$S_A(\vec{f}, z) = \iint A(\lambda_1)A(\lambda_2) \cos(\pi\lambda_1 z f^2) \cos(\pi\lambda_2 z f^2) d\lambda_1 d\lambda_2 = \left[ \int A(\lambda) \cos(\pi\lambda z f^2) d\lambda \right]^2. \quad (23)$$

В результате получается следующее выражение для дисперсии дифференциальных движений:

$$\sigma^2 = \int F_l(\vec{f}) \Phi_d(\vec{f}) S_A(\vec{f}, z) d\vec{f} \quad (24)$$

Функция  $S_A(\vec{f}, z)$  представляет собой квадрат действительной части преобразования Фурье от распределения энергии в спектре излучения [12] и зависит только от модуля частоты:

$$S_A(f, z) = [\tilde{A}(z f^2/2)]^2. \quad (25)$$

Отличие от случая мерцаний заключается в том, что Фурье-преобразование берется от самого распределения, а не от деленного на  $\lambda$ . Это связано с тем, что дрожания в ближней зоне ахроматичны, а мерцания всегда зависят от  $\lambda$ .

Выражение (24) отличается от монохромного случая только тем, что вместо обычного фильтра Френеля  $\cos^2(\pi\lambda z f^2)$  используется полихроматический фильтр  $S_A(z f^2/2)$ . Следовательно, результаты предыдущего раздела можно обобщить на случай широкой спектральной полосы регистрируемого излучения. Для этого достаточно заменить фильтр Френеля в выражениях (13) и (14). Рассчитанный для нашего прибора полихроматический фильтр Френеля изображен на Рис. 6 слева.

Пример нормированной весовой функции  $W(z)$  для нашего прибора DIMM показан на Рис. 6 справа. Видно, что отличие от монохроматического случая не столь велико. Это связано с тем, что эффект полихроматичности влияет в первую очередь на высокие пространственные частоты, а DIMM чувствителен к относительно низким частотам.

## 6 Эффект продолжительности экспозиции

Понимание того, что за характерное время экспозиции камеры DIMM в 0.01 с ветер сносит турбулентность на величину, сравнимую с размером апертуры прибора, вызвало появление теоретических [2] и экспериментальных [14] исследований влияния продолжительности экспозиции на получаемую в измерениях мощность дифференциальных дрожаний. Значимость этого эффекта привела к появлению методов его учета с привлечением или без дополнительных данных.

В практике измерений с прибором DIMM и их обработке чаще всего применяется метод чередующихся (interlacing) экспозиций (см., например, [4]). Суть этого метода заключается в чередовании экспозиций обычной длины и удвоенных, например, по 5 и 10 мс. Далее по

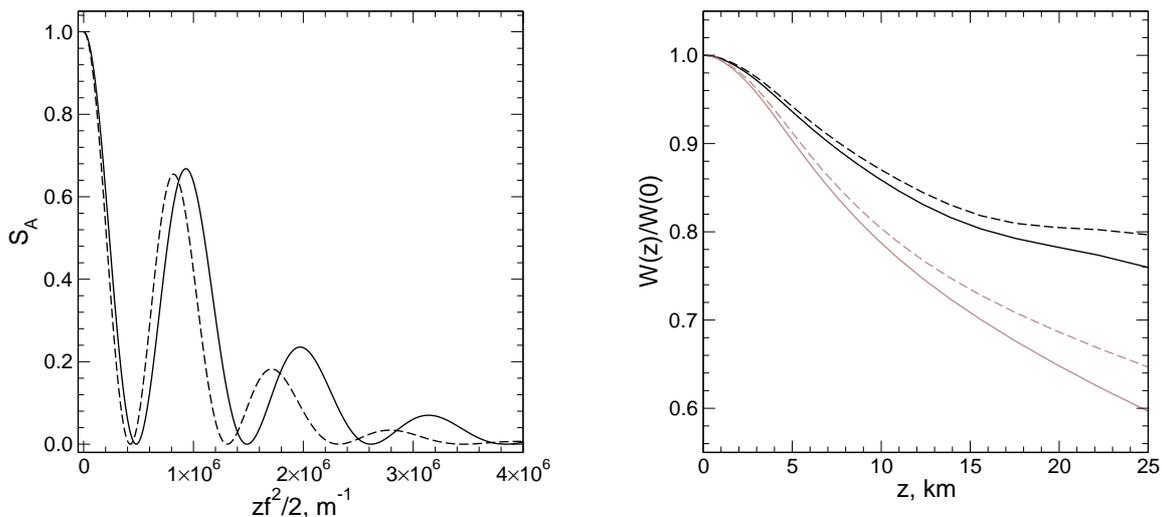


Рис. 6: Слева: полихроматический фильтр Френеля для ПЗС камеры ЕС650 и спектрально-го класса А0 V (сплошная линия) и К0 III (штриховая). Справа: весовые функции нашего инструмента DIMM: сплошные кривые — с учетом ширины спектра излучения (спектральный класс А0 V), штриховые — монохромные кривые для соответствующей эффективной длины волны. Продольные дрожания обозначены черным цветом, поперечные — серым

ним отдельно вычисляется качество изображения и итоговое качество изображение является их некоторой комбинацией.

При работе с высокоскоростными камерами такой способ неприменим, поскольку невозможно изменить экспозицию не останавливая видеопотока. Поэтому программа *dim*m при обработке кадров вычисляет дополнительно коэффициент корреляции между соседними измерениями положения изображений. Теоретическая основа коррекции с использованием корреляции изложена далее.

Оценку эффекта можно получить умножив временной спектр мощности дрожаний на спектральный фильтр, соответствующий усреднению сигнала за время экспозиции кадра  $\tau$ . В работе [2] использовано пространственное усреднение по координате  $x$  (напомним, что ось  $x$  направлена по ветру) в прямоугольном окне с шириной, равной величине сноса  $w\tau$ :

$$\sigma_1^2(w\tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} df_x df_y F_d(f_x, f_y) \text{sinc}^2(f_x w\tau), \quad (26)$$

где множитель  $\text{sinc}^2(f_x w\tau)$  — спектральный фильтр, соответствующий такому усреднению. Естественно, результат зависит от ориентации базы DIMM относительно ветра и измеряемой компоненты дрожаний.

Аналогично, при усреднении по двум соседним экспозициям длительности  $\tau$  с периодом  $\tau_p$  ( $\tau_p \geq \tau$ ) дисперсия дрожаний  $\sigma_2^2(w\tau, \tau_p)$  выглядит как:

$$\sigma_2^2(w\tau, \tau_p) = \iint_{-\infty}^{\infty} df_x df_y F_d(f_x, f_y) \text{sinc}^2(f_x w\tau) \cos^2(\pi f_x w\tau_p), \quad (27)$$

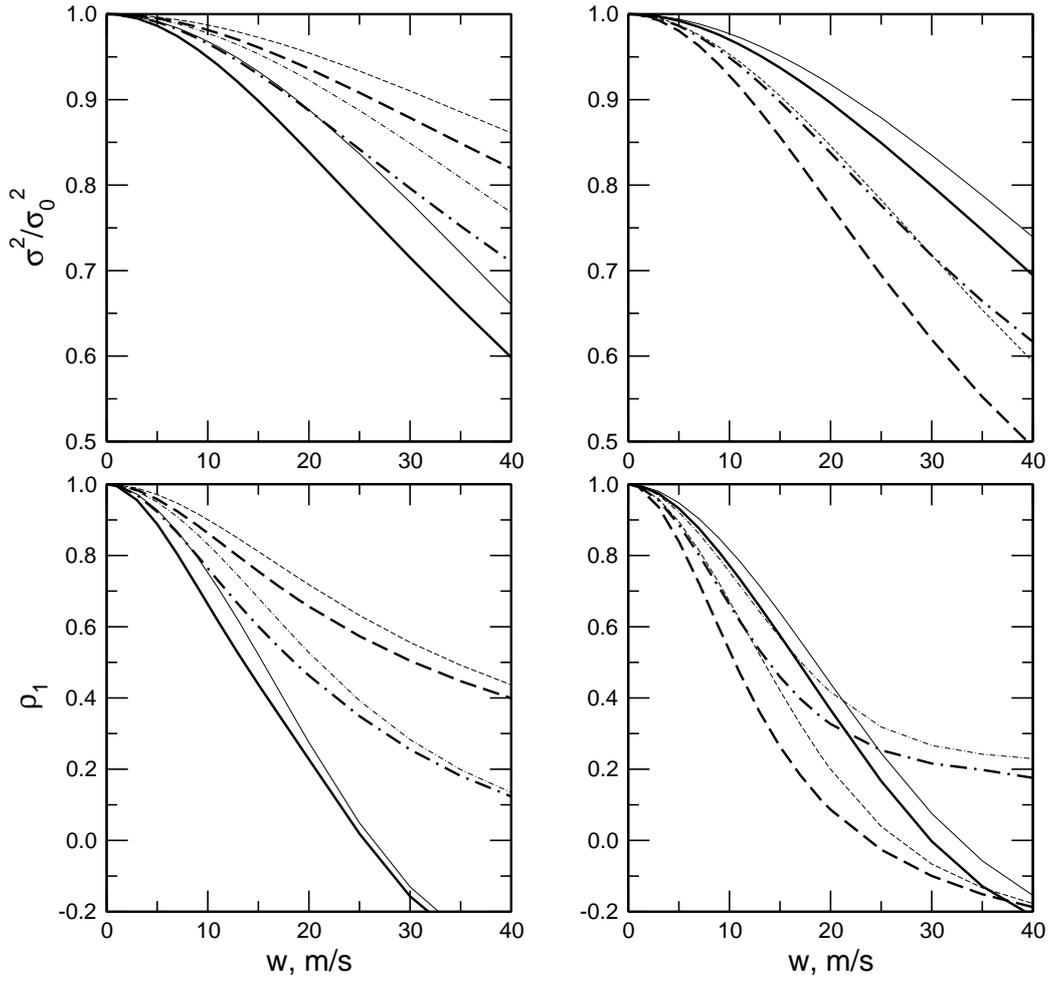


Рис. 7: *Верхний ряд*: Относительное падение дисперсии дифференциальных дрожаний  $\sigma^2(w)$  в зависимости от скорости ветра. *Нижний ряд*: Коэффициент корреляции соседних экспозиций  $\rho_1$ . *Левая колонка*: Продольные дрожания. *Правая колонка*: Поперечные дрожания. Сплошными кривыми обозначен случай ветра вдоль базы, штриховыми кривыми — ветер поперек базы, штрих-пунктирными — под углом  $45^\circ$ . Толстые кривые — распространение не учитывается (низкая турбулентность), тонкие кривые — распространение с высоты 16 км (высокая турбулентность). Кривые рассчитаны для экспозиции 4 мс и периода кадров 5 мс

где фильтр  $\text{sinc}^2(f_x w \tau) \cos^2(\pi f_x w \tau_p)$  соответствует такому усреднению.

Коэффициент корреляции смещений изображения на соседних кадрах  $\rho_1$  выражается через эти величины следующим образом:

$$\rho_1 = \frac{2\sigma_2^2(w\tau, \tau_p)}{\sigma_1^2(w\tau)} - 1 \quad (28)$$

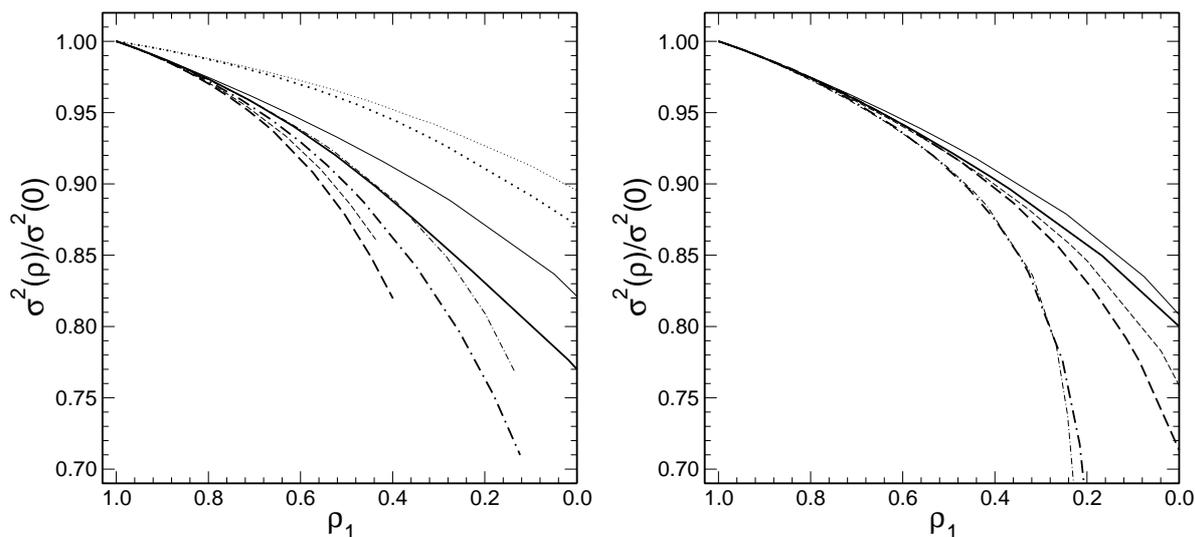


Рис. 8: Зависимость падения дисперсии дифференциальных дрожаний от коэффициента корреляции  $\rho_1$ . Слева — продольные дрожания, справа — поперечные дрожания. Кривые обозначены также как и на Рис. 7. Для сравнения, слева пунктиром нанесены кривые поведения при продольном ветре и экспозиции 2.5 мс

На Рис. 7 показаны расчетные зависимости  $\sigma^2(w\tau)/\sigma^2(0)$  и коэффициента корреляции  $\rho_1$  от скорости ветра для различных ситуаций, выполненные для параметров нашего инструмента DIMM и параметров его камеры:  $\tau = 4$  мс и  $\tau_p = 5$  мс.

Из графиков видно, что трансверсальные дрожания более подвержены обсуждаемому эффекту и при ветре, достигающем в тропопаузе скорости в 40 м/с, измеряется только 50–70% мощности, даже при достаточно короткой экспозиции. Учет распространения несколько уменьшает эффект, поскольку распространение ослабляет высокочастотную часть спектра. Разные направления ветра вносят дополнительную неопределенность порядка 2 раз в потерю мощности.

Поведение величины  $\rho_1$  также сильно зависит от направления ветра в турбулентном слое. Однако заметим, что крайние ситуации: ветер строго вдоль базы или строго поперек, практически не реализуются из-за случайных вариаций направления. Оценка характерной величины этих вариаций и соображения симметрии пространственного спектра дифференциальных дрожаний приводит к тому, что реальная неопределенность будет значительно меньше.

К тому же, зависимость от направления для измеренной мощности  $\sigma^2(w\tau)$  частично компенсируется синфазной зависимостью коэффициента корреляции и зависимость  $\sigma^2(w\tau)$  от  $\rho_1$ , приведенная на Рис. 8, выглядит более однозначно, за исключением случая трансверсальных дрожаний при ветре под углом  $45^\circ$ . Эта зависимость и будет использоваться для учета влияния конечной продолжительности экспозиции.

## 7 Коррекция дисперсии дрожаний

В работах [2, 14] величина коррекции оценивалась на основе модельных предположений о профиле  $C_n^2(h)$  и скорости ветра  $w(h)$ . Метод чередующихся экспозиций и использование измеряемого коэффициента корреляции предназначен для независимой от модельных предположений коррекций. Проблема заключается в том, что изображенные на Рис. 8 зависимости реализуются внутри отдельного слоя.

Покажем, что, по крайней мере в случае линейного приближения, коррекция к нулевой экспозиции возможна по измеренным величинам  $\tilde{\sigma}^2$  и  $\rho_1$ . Условно обозначим мощность дрожаний, вызываемых слоем на высоте  $h$ , как  $\tilde{\sigma}^2(h)$ , а ковариацию как  $\tilde{\sigma}^2(h)\rho_1(h)$ . Поскольку ковариации, также как и дисперсии, складываются при полной независимости фазовых искажений в разных слоях (основная парадигма малых возмущений), то для итоговых величин можно записать:

$$\tilde{\sigma}^2 = \int \tilde{\sigma}^2(h) dh, \quad \tilde{\sigma}^2 \rho_1 = \int \tilde{\sigma}^2(h)\rho_1(h) dh \quad (29)$$

Истинная (при нулевой экспозиции) мощность  $\sigma^2$  представляется как

$$\sigma^2 = \int \sigma^2(h) dh = \int \tilde{\sigma}^2(h) \cdot f(\rho_1(h)) dh, \quad (30)$$

где  $f(\rho_1(h))$  — корректирующая функция, аргументом которой является коэффициент корреляции в слое. Если эта функция описывается линейным законом  $a_0 + a_1\rho_1$ , то можно записать (30) в виде:

$$\sigma^2 = \int \tilde{\sigma}^2(h)(a_0 + a_1\rho_1(h)) dh = a_0 \int \tilde{\sigma}^2(h) dh + a_1 \int \tilde{\sigma}^2(h)\rho_1(h) dh = a_0\tilde{\sigma}^2 + a_1\tilde{\sigma}^2\rho_1. \quad (31)$$

Более сложная, точнее описывающая расчетную зависимость, корректирующая функция не обеспечивает аддитивности и, следовательно, в общем случае может давать худшие результаты. Эти же рассуждения применимы к методу чередующихся экспозиций, то есть только использование линейного приближения коррекции гарантирует независимость от распределения турбулентности по высоте.

Следует иметь в виду, что на Рис. 8 изображено поведение  $\tilde{\sigma}^2(\rho_1)/\sigma^2$ , а семейство корректирующих функций представляет обратные зависимости:  $\sigma^2/\tilde{\sigma}^2(\rho_1)$ .

Для того, чтобы найти наиболее вероятную линейную аппроксимацию, были исследованы значения коэффициентов  $\rho_1$ , полученные в измерениях 2007 – 2009 гг на вершине Шатджатмаз. На Рис. 9, слева, показаны их коммулятивные распределения, построенные по минутным значениям. Медианные значения коэффициентов корреляции составляют 0.85 для обеих компонент измеряемых дифференциальных дрожаний. Достоверность приведенных кривых подтверждается величинами относительных ошибок определения  $\rho_1$ , составляющих в среднем 0.03.

На этом же рисунке справа приведены медианные зависимости  $\rho_1$  от скорости приземного ветра. Видно, что даже в отсутствие приземного ветра, измеренные зависимости идут ниже расчетных из-за того, что в свободной атмосфере ветер постоянно присутствует.

Из графиков, приведенных на Рис. 8 следует, что для 50% измерений величина необходимой коррекции меньше 2% (или примерно 1% для качества изображения  $\beta$ ). Для 90%

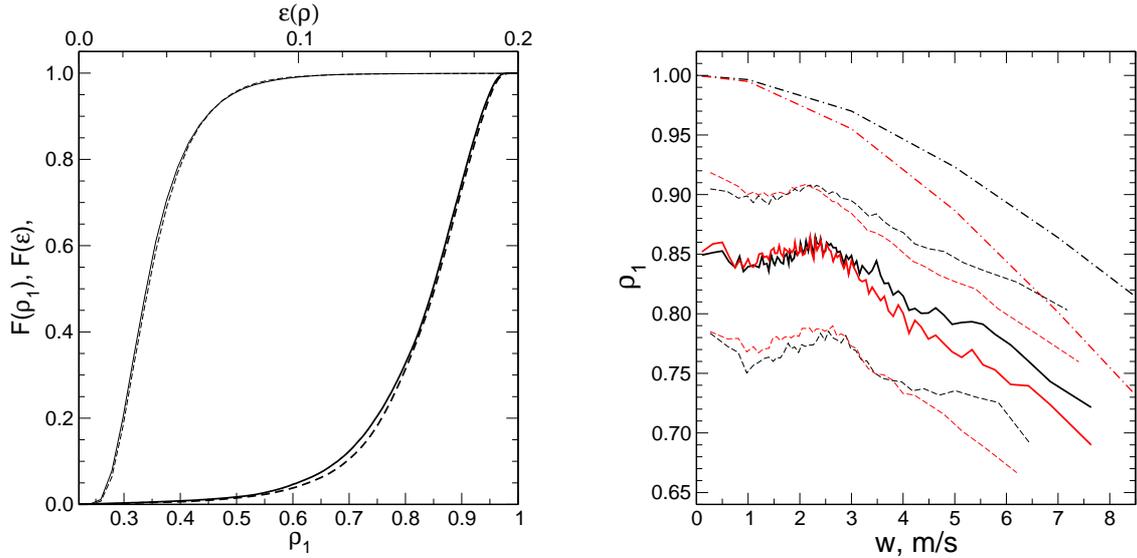


Рис. 9: Слева: Кумулятивные распределения наблюдаемого коэффициента корреляции  $\rho_1$  (жирные кривые). Сплошной линией обозначены продольные, штриховой — поперечные дрожания. Тонкими линиями нанесены распределения относительных ошибок  $\epsilon$  определения  $\rho_1$  внутри 1 мин интервала (верхняя шкала). Справа: зависимость медианных значений  $\rho_1$  от скорости ветра для продольной (черная линия) и поперечной компоненты (красная). Тонкие штриховые кривые означают 25 и 75% квантили распределений. Штрих-пунктирные кривые — расчетные зависимости для направления ветра  $45^\circ$ .

измерений коррекция меньше 5%. Тем не менее, используя дифференциальные распределения наблюдаемых значений  $\rho_1$  в качестве весов, мы построили коррекционную зависимость в виде

$$\sigma^2 = \tilde{\sigma}^2 (1 + 0.15(1 - \rho_1)). \quad (32)$$

По этой формуле для маргинальных случаев  $\rho_1 < 0.5$  коррекция становится около 8% по интенсивности ОТ.

Предварительный анализ измерений с нашим прибором DIMM показал, что при экспозиции 4 мс для самых ярких звезд наблюдается насыщение сигнала в центре изображений. Поэтому с декабря 2009 экспозиция было уменьшена до 2.5 мс. На точность измерений это никак не отразилось вследствие малых шумов используемой ПЗС-камеры. На Рис. 8, слева, пунктирной линией нанесена зависимость для такой экспозиции. Видно, что величина требуемой коррекции уменьшается практически вдвое.

## 8 Оценка вклада низкочастотных компонент дрожаний

Измерения ОТ с прибором DIMM производятся циклически по следующей схеме: в течение времени измерения  $T_b$  с камеры принимается около  $T_b/\tau_p$  кадров (точное значение несколько варьируется при изменении рабочего окна) и для обеих компонент дифференциальных дрожаний вычисляются выборочные средние разделения ( $\hat{\delta}_l, \hat{\delta}_t$ ) и оценки дисперсии дрожаний ( $\hat{\sigma}_l^2, \hat{\sigma}_t^2$ ) относительно этих средних. За время накопления  $T_a$  выполняется  $N = T_a/T_b$

Таблица 1: Характерные точки распределений мощностей дифференциальных дрожаний

Распределение	продольные			поперечные		
	25%	50%	75%	25%	50%	75%
Полная измеренная мощность $P_{tot}$	0.380	0.578	0.926	0.248	0.372	0.588
Низкочастотная мощность $P_{low}$	0.031	0.048	0.076	0.026	0.042	0.067
Мощность из-за тренда $P_{trend}$	0.001	0.002	0.008	0.001	0.002	0.007
Корректированная полная мощность $P_{tot}^*$	0.373	0.570	0.917	0.243	0.365	0.580
Коррек. низкочастотная мощность $P_{low}^*$	0.027	0.043	0.067	0.023	0.037	0.060
Доля низкочастотной мощности $P_{low}^*/P_{tot}^*$	0.043	0.175	0.130	0.056	0.104	0.186
Отношение $l/t$ для полной мощности $P_l^*/P_t^*$	1.442	1.567	1.690			
Отношение $l/t$ для низкой частоты $P_l^*/P_t^*$	0.779	1.148	1.664			

таких измерений, основной объем измерений выполнен с  $T_a = 60$  с и  $T_b = 2$  с.

Понятно, что низкочастотные дрожания не войдут в таком образом определяемые оценки мощности. Мощность таких дрожаний можно оценить по формуле (26), подставив туда  $T_b$  вместо  $\tau$ . С другой стороны, эту же мощность можно оценить из данных измерений как дисперсию флуктуаций значений  $(\hat{\delta}_l, \hat{\delta}_t)$  внутри интервала накопления, вычисляемую относительно определенных по нему средних разделений  $(\langle \delta_l \rangle, \langle \delta_t \rangle)$ .

Вопрос величины низкочастотной мощности является весьма существенным по двум причинам: 1) продолжительность накопления должна гарантировать, что в любой реальной ситуации получаемая в результате величина включает подавляющую часть всей мощности ОТ (скажем, 0.99) и 2) получаемые синхронно с измерениями индексов мерцаний величины  $(\hat{\sigma}_l^2, \hat{\sigma}_t^2)$  являются состоятельными оценками мгновенной мощности турбулентности и могут быть использованы для восстановления высотного профиля.

Итак, под высокочастотной составляющей мощности  $P_{high}$  дрожаний мы будем понимать в дальнейшем  $(\langle \sigma_l^2 \rangle, \langle \sigma_t^2 \rangle)$ , под низкочастотной  $P_{low} = (\langle (\delta_l - \langle \delta_l \rangle)^2 \rangle, \langle (\delta_t - \langle \delta_t \rangle)^2 \rangle)$ , где усреднение осуществляется по всему интервалу накопления  $T_a$ , а все величины выражены в пикселях ПЗС камеры DIMM. Полная мощность в этом случае определится как

$$P_{tot} = P_{high} + P_{low} = \langle \sigma^2 \rangle + \langle (\delta - \langle \delta \rangle)^2 \rangle, \quad (33)$$

где индексы  $l$  и  $t$  опущены. Мгновенная  $\Pi_i$  полная мощность в  $i$ -том измерении будет равна

$$\Pi_i = \sigma_i^2 + (\hat{\delta}_i - \langle \delta \rangle)^2. \quad (34)$$

Характерные величины, полученные по двухгодичному набору измерений на горе Шатд-жатмаз, приведены в Табл. 1.

Величина  $P_{trend}$  представляет часть мощности, связанной с линейным трендом внутри интервала накопления. Видно, что она невелика, ее учет (строки  $P_{tot}^*$  и  $P_{low}^*$ ) уменьшает низкочастотную мощность примерно на 10%, а полную мощность — на 1.5 – 2%. Анализ распределений соседних разностей  $(\langle \delta_l \rangle, \langle \delta_t \rangle)$  показывает, что оценка дисперсии их флуктуаций (после отброса маргинальных значений, соответствующих моментам фокусировки) составляет 0.034 и 0.022, что хорошо согласуется с оценкой вклада тренда из Табл. 1. Скорее всего, тренд связан не с атмосферой, а с температурными и механическими изменениями геометрии прибора.

Понятно, что доля низкочастотных ( $\lesssim 1$  Гц) дифференциальных движений должна напрямую зависеть от скорости ветра. На Рис. 10, слева, приведены медианные значения полной и низкочастотной мощности по нашим измерениям. Видно, что характер зависимостей разный, хотя на кривой для  $P_{low}^*$  прослеживается некоторое влияние поведения общей мощности.

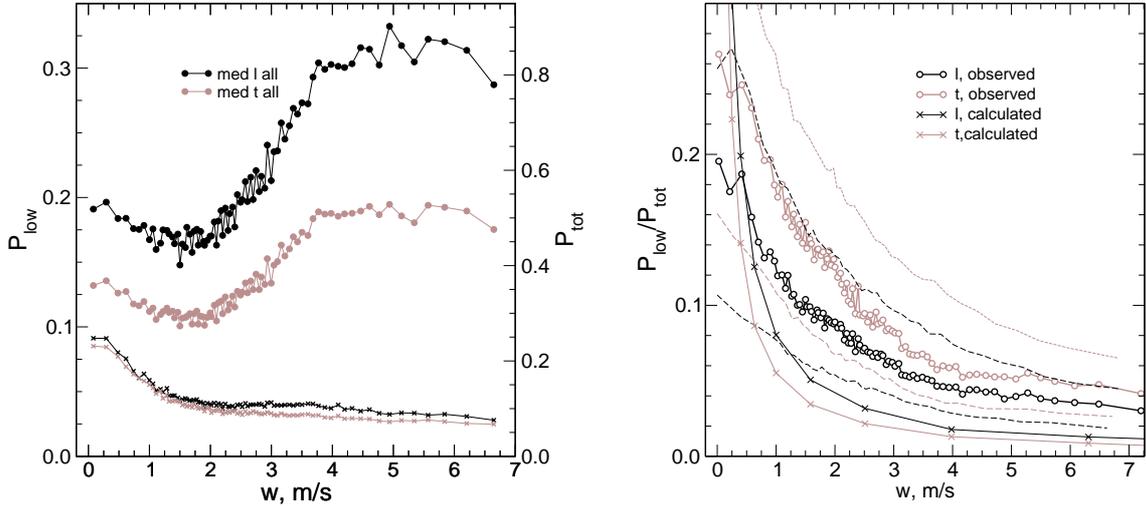


Рис. 10: Слева: зависимости полной и низкочастотной мощностей дрожаний от скорости приземного ветра. Черным цветом обозначены кривые для продольных, серым – для поперечных дрожаний. Масштаб для  $P_{low}$  и  $P_{tot}$  разный. Справа: поведение доли низкочастотных дрожаний в зависимости от скорости ветра. Штриховые линии представляют 25% и 75% квартиль. Тонкие линии с крестиками — теоретическая зависимость, посчитанная с использованием временных спектров.

Тем не менее, эта кривая падает с возрастанием ветра значительно медленнее, чем следует из вида теоретического временного спектра. Похоже, что в низкочастотных дрожаниях присутствует компонента другой природы, отличная от дрожаний, вызываемых турбулентностью собственно атмосферы. Например, это могут быть внутри и около телескопные искажения волнового фронта, скорость движения которых мала и слабо зависит от скорости регулярного ветра. Возможно, что это проявление нестационарности процесса дрожаний на временах порядка нескольких секунд.

На Рис. 10, справа, представлены зависимости медианных значений доли низкочастотного дрожания. Там же нанесены теоретические зависимости от скорости ветра, вычисленные с использованием выражения (6) для временного спектра. Поскольку этот спектр в низкочастотной части сильно зависит от направления ветра относительно базы прибора, то было проведено усреднение по направлениям.

Видно, что теоретические кривые предсказывают в 3–4 раза меньшую долю  $P_{low}/P_{tot}$ , чем наблюдается в действительности. Только при скоростях ветра  $\lesssim 1$  м/с теоретическую и наблюдаемую оценки можно считать одинаковыми. Второе обстоятельство состоит в том, что теория предсказывает большую долю для продольных дрожаний, в то время как на

блюдается обратный эффект — доля для поперечных дрожаний заметно выше.

Еще один факт заключается в том, что не удалось обнаружить никакого различия в зависимостях продольных дрожаний, построенных для случая ветра вдоль базы и случая ветра поперек базы DIMM, хотя теоретические оценки показывают, что доля низкочастотных дрожаний в этих двух ситуациях различается на порядок.

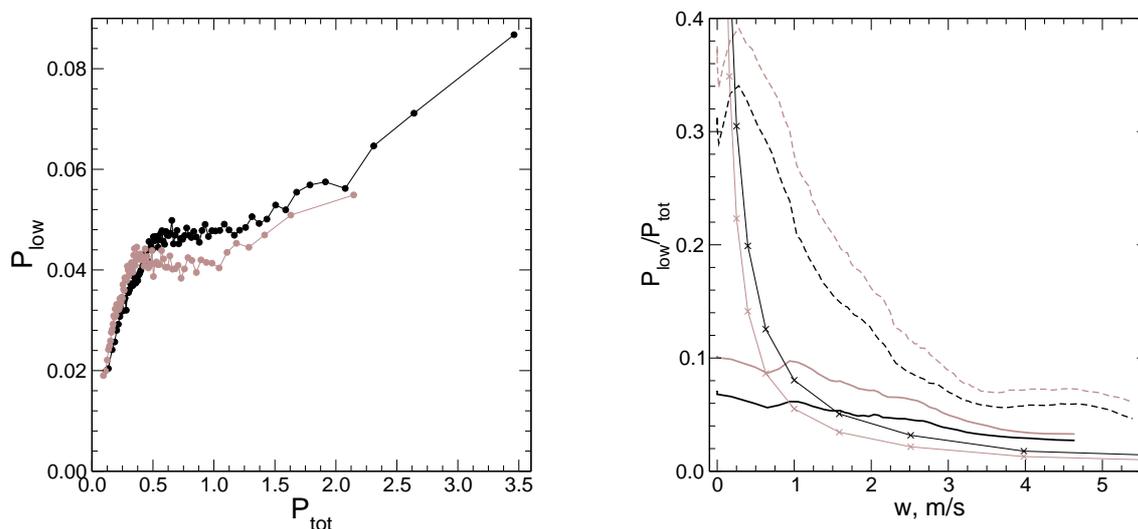


Рис. 11: Слева: зависимость низкочастотной мощности  $P_{low}$  от полной  $P_{tot}$ . Черным цветом обозначены кривые для продольных, серым – для поперечных дрожаний. Справа: поведение доли низкочастотных дрожаний в зависимости от скорости ветра для выборки с высокой турбулентностью (сплошные кривые) для низкой турбулентностью (штриховые). Тонкие линии с крестиками — теоретическая зависимость, посчитанная с использованием временных спектров.

Кривые зависимости  $P_{low}$  от полной мощности  $P_{tot}$ , приведенные на Рис. 11 слева, демонстрируют резкий излом поведения в области  $P_{tot} \approx 0.5$ , что, вероятно, свидетельствует о наличии двух, сильно отличающихся друг от друга, турбулентных механизмов.

Например, зависимости доли низкочастотных дрожаний от скорости ветра для двух выборок наблюдений с доминирующей низкой и с доминирующей высокой турбулентностью, показанные на том же рисунке справа, различаются очень сильно. Однако, формально использованная скорость приземного ветра, вряд ли имеет отношение к движению высокой турбулентности и скорее всего, эта зависимость искажается присутствующей в выборке некоторой долей низкой турбулентности.

В любом случае, вопрос о том, относится ли избыток низкочастотной мощности к характеристикам турбулентной атмосферы или является артефактом методики измерения DIMM, достаточно важен, поскольку эта величина может достигать в отдельных случаях 20 – 30% всей интенсивности турбулентности (или до 50% от высокочастотной части).

В последней версии программы обработки данных DIMM в качестве выходного результата приводится интенсивность турбулентности, посчитанная по мощности дрожаний из выражения (33), а в качестве мгновенных значений для восстановления высотных профи-

лей — оценка по формуле (34). Очевидно, что среднее значение мгновенной мощности по интервалу усреднения равно полной мощности  $P_{tot}$ .

## 9 Обработка вместе с MASS

### Список литературы

- [1] Fried D.L., JOSA, 55, p. 1427, 1965
- [2] Martin H.M., PASP, V. 99, p. 1360, 1987
- [3] Fried D.L., Radio Science, 10, p. 71, 1975
- [4] Tokovinin A., PASP, **114**, 1156, 2002
- [5] Sarazin M. Roddier F., Astron. Astrophys., 227, p.294, 1990
- [6] Thomas-Osip J., Prieto G., Johns M., Phillips M., Proceedings of the SPIE, V. 7012, pp. 70121U-70121U-12, 2008
- [7] Татарский В.И. Распространение волн в турбулентных средах. М.: Наука, 1967
- [8] Tokovinin A., Baumont S., Vasquez J., MNRAS, V. 340, Issue 1, pp. 52-58, 2003
- [9] Tokovinin A., Kornilov V., MNRAS, **381**, 1179, 2007
- [10] Tokovinin A., Kornilov V., in ASP Conference Proceedings, V. 266. Edited by J. Vernin, Z. Benkhaldoun, and C. Muñoz-Tuñón, p.104, 2002
- [11] Kornilov V., Tokovinin A., Voziakova O., Zaitsev A., Shatsky N., Potanin S., Sarazin M., Proc. SPIE, V. 4839, p. 837, 2003
- [12] Tokovinin A., JOSA(A), 2003, **20**, 686, 2003
- [13] Berdja A., Borgnino J., Irbah A., Journal of Optics A: Pure and Applied Optics, V. 8, Issue 3, p. 244, 2006
- [14] Soules D.B., Drexler J.J., Draayer B.F., et al, PASP, **108**, 817, 1996